639. Löwner ノ定理ニ就イテ

城　憲三（阪大 工）

Löwner ハ Annalen Bd. 89 (1923) ニ於テ

$|z|<1$ デ函数

$$f(z)=e^{-t_0}\left(z+b_1z^2+b_2z^3+\cdots\cdots\right),\quad |f(z)|\leqq 1,$$

$$(t_0\geqq 0)$$

ガ正則デ単葉ナルトキハ（コヽニ係数 $b_1, b_2, \cdots\cdots$ ハ t_0 ノ函数），

(1) $|b_1|\leqq 2(1-e^{-t_0})$,

(2) $|b_2|<3-4e^{-t_0}+e^{-2t_0}$

ナルコトヲ証明シタ。

(1)ハ Pick ノ結果ニ他ナラズ，ソノ等号ハ函数

$$(3)\qquad \frac{f(z)}{(1+\varepsilon f(z))^2}=e^{-t_0}\frac{z}{(1+\varepsilon z)^2},\qquad |\varepsilon|=1$$

ノトキニ成立スル。實際 (3) 式カラ

$$f(z)=e^{-t_0}\left(z-2\varepsilon(1-e^{-t_0})z^2\right.$$
$$\left.+\varepsilon^2(3-8e^{-t_0}+5e^{-2t_0})+z^3+\cdots\cdots\right)$$

ヲ得ル。

シカシナガラ，Löwner モ注意シテヰルヤウニ (2) ハ Scharf ナ Schranke ヲ與ヘテヰナイ、唯 $t_0\to\infty$ ニ對シ

$$\lim_{t_0\to\infty}\frac{f(z)}{e^{-t_0}}=\lim_{t_0\to\infty}\left(z+b_1z^2+b_2z^3+\cdots\cdots\right)$$

$$= z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots\cdots$$

トオケバ，(1)，(2) ノ系トシテ

$$(1') \quad |a_2| \leqq 2 \quad (\text{Bieberbach})$$

$$(2') \quad |a_3| \leqq 3 \quad (\text{Löwner})$$

ガ得ラレ，之等ハ Scharf トナル。

本論ノ目的ハ不等式(2)ヲ Scharf ナモノニスルコトデアル、之ハマダ分ツテキナイ。(*)

§1. 我々ノ目的ノタメニ，先ヅ Valiron-Landau ノ定理**) ヲ書キ変ヘナケレバナラヌ。

定理1. 實函數 $\lambda(\tau)$ ハ $t_0 \geqq \tau \geqq 0$ デ高々一点ヲ除イテ連續デ

$$|\lambda(\tau)| \leqq e^{-\tau}$$

トスル、又 $0 < N \leqq \frac{1}{2}(1 - e^{-2t_0})$ トシ，

$$\int_0^{t_0} \lambda^2(\tau)\, d\tau \leqq N$$

トスル、コノトキハ

$$\left| \int_0^{t_0} \lambda(\tau)\, d\tau \right| \leqq \nabla(N),$$

コヽニ $\nu = \nu(N)$ ヲ，$t_0 e^{-2t_0} \leqq N \leqq \frac{1}{2}(1 - e^{-2t_0})$ ナルトキハ

---

*) E. Peschl. Zur Theorie der schlichten Funktionen, Journal für Math. 176 (1936), S. 61–94. Teil II ノ最後参照。

**) Math. Zeitschr. 30, (1929), S. 630

$$\left(\nu+\frac{1}{2}\right)e^{-2\nu}-\frac{1}{2}e^{-2t_0}=\mathrm{N},\quad t_0\geqq\nu\geqq 0$$

ノ根トシテ，$0<\mathrm{N}<t_0e^{-2t_0}$ ナルトキハ $\nu(\mathrm{N})=t_0$ ト定メ

$$\nabla(\mathrm{N})=(\nu+1)e^{-\nu}-e^{-t_0}$$

デアル。

注意 $\nu=\nu(\mathrm{N})$ ハ常ニ唯一ツ定マル、ソレハ ν ノ函數 $(\nu+\frac{1}{2})e^{-2\nu}-\frac{1}{2}e^{-2t_0}$ ハ微係數 $-2\nu e^{-2\nu}<0$ ヲ有シ，ν ガ 0 カラ t_0 マデ增加スレバ，函數値ハ $\frac{1}{2}(1-e^{-2t_0})$ カラ $t_0e^{-2t_0}$ マデ變ルカラデアル。

證明. (A) $0<\mathrm{N}<t_0e^{-2t_0}$ ナルトキハ $\nabla(\mathrm{N})=t_0e^{-t_0}$ トナルガ，

$$\left|\int_0^{t_0}\lambda(\tau)\,d\tau\right|\leqq\int_0^{t_0}|\lambda(\tau)|\,d\tau\leqq\sqrt{\int_0^{t_0}\lambda^2(\tau)\,d\tau\int_0^{t_0}d\tau}$$

$$\leqq\sqrt{t_0e^{-2t_0}\,t_0}=t_0e^{-t_0}$$

(B) 1 $\quad\mu(\tau)=\begin{cases}e^{-\nu}, & 0\leqq\tau\leqq\nu,\\ e^{-\tau}, & \nu\leqq\tau\leqq t_0\end{cases}$

ト定メルト，

$$(4)\quad\int_0^{t_0}\mu^2(\tau)\,d\tau=\int_0^{\nu}e^{-2\nu}d\tau+\int_{\nu}^{t_0}e^{-2\tau}d\tau$$

$$=\left(\nu+\frac{1}{2}\right)e^{-2\nu}-\frac{1}{2}e^{-2t_0}=\mathrm{N}\geqq\int_0^{t_0}\lambda^2(\tau)\,d\tau$$

而シテ $t_0\geqq\tau\geqq 0$ ニ於テハ

$$(5)\quad\left(\mu(\tau)-|\lambda(\tau)|\right)\left(2e^{-\nu}-\mu(\tau)-|\lambda(\tau)|\right)\geqq 0$$

デアル、何トナレバ，$0\leqq\tau\leqq\nu$ ナルトキハ左邊ハ $(e^{-\nu}-|\lambda(\tau)|)^2$ ニシテ，$\nu\leqq\tau\leqq t_0$ ナルトキハ

$$e^{-\nu} \geqq \mu(\tau) = e^{-\tau} \geqq |\lambda(\tau)|$$

ガ成立スルカラデアル。依ツテ (5) ヨリ

$$0 \leqq \int_0^{t_0} \left(\mu(\tau) - |\lambda(\tau)|\right)\left(2e^{-\nu} - \mu(\tau) - |\lambda(\tau)|\right) d\tau$$

$$= 2e^{-\nu}\left(\int_0^{t_0} \mu(\tau) d\tau - \int_0^{t_0} |\lambda(\tau)| d\tau\right) - \int_0^{t_0} \mu^2(\tau) d\tau + \int_0^{t_0} |\lambda(\tau)|^2 d\tau$$

(4) ガ成立スルカラ，従ツテ

$$\left|\int_0^{t_0} \lambda(\tau) d\tau\right| \leqq \int_0^{t_0} |\lambda(\tau)| d\tau \leqq \int_0^{t_0} \mu(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^{\nu} e^{-\nu} d\tau + \int_{\nu}^{t_0} e^{-\tau} d\tau = \nu e^{-\nu} + e^{-\nu} - e^{-t_0} = \nabla(N)$$

2. 實際 $\lambda(\tau) = \mu(\tau)$ ナラバ，

$$\int_0^{t_0} \lambda^2(\tau) d\tau = N, \quad \int_0^{t_0} \lambda(\tau) d\tau = \nabla(N)$$

デアル。

§2. 定理2. $\kappa(\tau) = e^{i\vartheta(\tau)}$ ヲ $t_0 \geqq \tau \geqq 0$ デ高々一点ヲ除キ連続トシ，$|\kappa(\tau)| = 1$ ニシテ

$$0 < M \leqq \frac{1}{2}(1 - e^{-2t_0})$$

トスル。モシ，

$$\left|\int_0^{t_0} \kappa^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau\right| \leqq M$$

ナラバ

$$\left|\int_0^{t_0} \kappa(\tau) e^{-\tau} d\tau\right| \leqq \nabla\left(\frac{1}{4} + \frac{M}{2} - \frac{1}{4} e^{-2t_0}\right)$$

(∇ ノ定義ハ §1 ノ通リ)

上式ノ等号ノ成立スルヤウナ $K(\tau)$ ガ存在スル。

証明. 1 一般性ヲ失ハズ $\int_0^{t_0} K(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau \geqq 0$ トスル。

（然ラザルトキハ $K(\tau)$ ノ代リニ $\varepsilon K(\tau)$, $|\varepsilon| = 1$ ヲ考フレバヨシ）、スルト仮定カラ

$$M \geqq \Re \int_0^{t_0} K^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau = \int_0^{t_0} e^{-2\tau}(2\cos^2\vartheta(\tau) - 1)\, d\tau$$

$$= 2\int_0^{t_0} e^{-2\tau}\cos^2\vartheta(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2} e^{-2t_0} - \frac{1}{2},$$

$$\int_0^{t_0} e^{-2\tau}\cos^2\vartheta(\tau)\, d\tau \leqq \frac{1}{4} + \frac{M}{2} - \frac{1}{4} e^{-2t_0} \equiv N$$

$$\leqq \frac{1}{2}(1 - e^{-2t_0}),\ N = \left(\nu + \frac{1}{2}\right) e^{-2\nu} - \frac{1}{2} e^{-2t_0}$$

依テ，定理 1 ニ於テ $\lambda(\tau) = e^{-\tau}\cos\vartheta(\tau)$ ト考ヘ，

$$\left| \int_0^{t_0} K(\tau)\, e^{-\tau} d\tau \right| = \int_0^{t_0} e^{-\tau}\cos\vartheta(\tau)\, d\tau \leqq V\left(\frac{1}{4} + \frac{M}{2} - \frac{1}{4} e^{-2t_0}\right)$$

2、上ノ定理ニ示シタ不等式ノ等号ノ成立シ得ルコトヲ示シテオク。

$\nu = \nu(N) = \nu\left(\frac{1}{4} + \frac{M}{2} - \frac{1}{4} e^{-2t_0}\right)$ トシ，次式ヲ満足スル β ヲ選ブ。

$$\int_0^{\beta} e^{-(\tau+\nu)} \sqrt{1 - e^{2(\tau-\nu)}}\, d\tau - \int_{\beta}^{\nu} e^{-(\tau+\nu)} \sqrt{1 - e^{2(\tau-\nu)}}\, d\tau = 0,$$

$$0 \leqq \beta \leqq \nu$$

実際，上ノ左辺ハ β ニツイテ連続デ左辺ハ $\beta = 0$ ノトキハ $\leqq 0$,

$\beta = \nu$ ノトキハ $\geqq 0$ デアルカラ β ハ求マル、ソコデ

$$\vartheta(\tau)=\begin{cases}\arccos e^{\tau-\nu}, & 0\leqq\tau\leqq\beta,\\ -\arccos e^{\tau-\nu}, & \beta<\tau\leqq\nu,\\ 0, & \nu\leqq\tau\leqq t_0\end{cases}$$

$$\kappa(\tau)=e^{i\vartheta(\tau)}$$

ト定ム、スルト $\kappa(\tau)$ ハ $\tau=\beta$ ヲ除キ連続デ $|\kappa(\tau)|=1$ デアッテ

$$\int_0^{t_0}\kappa^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau=\int_0^{t_0} e^{-2\tau}(2\cos^2\vartheta(\tau)-1)d\tau$$

$$+2i\int_0^{t_0}e^{-2\tau}\cos\vartheta(\tau)\sin\vartheta(\tau)d\tau$$

$$=2\int_0^{\nu}e^{-2\tau}\cdot e^{2\tau-2\nu}d\tau+2\int_\nu^{t_0}e^{-2\tau}d\tau+\frac{1}{2}e^{-2t_0}-\frac{1}{2}$$

$$+2i\left(\int_0^{\nu}e^{-(\tau+\nu)}\sqrt{1-e^{2(\tau-\nu)}}d\tau-\int_\beta^{\nu}e^{-(\tau+\nu)}\sqrt{1-e^{2(\tau-\nu)}}d\tau\right)$$

$$=2\nu e^{-2\nu}-e^{-2t_0}+e^{-2\nu}+\frac{1}{2}e^{-2t_0}+\frac{1}{2}=M$$

又

$$\left|\int_0^{t_0}\kappa(\tau)e^{-\tau}d\tau\right|\geqq\Re\int_0^{t_0}\kappa(\tau)e^{-\tau}d\tau=\int_0^{\nu}e^{-\nu}d\tau+\int_\nu^{t_0}e^{-\tau}d\tau$$

$$=\nu e^{-\nu}-e^{-t_0}+e^{-\nu}=\nabla\left(\frac{M}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2t_0}\right)$$

§3. 扨テ, *Löwner* ニヨリ, 上ノヤウナ $\kappa(\tau)$ ノ何レカヲ取リ帯ニ,

$$b_2=b_2(t_0)=4\left[\int_0^{t_0}\kappa(\tau)e^{-\tau}d\tau\right]^2-2\int_0^{t_0}\kappa^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau$$

ト表ハセル。

一般性ヲ失ハズ $|b_2(t_0)|=\Re\, b_2(t_0)$ ト考ヘル。(コレモ $|\varepsilon|$ ヲ適當ニトレバ $\kappa(\tau)$ ノ代リニ $\varepsilon\kappa(\tau)$ ヲ考ヘテ可能)

依ツテ

$$\left|b_2(t_0)\right| = \Re\, b_2(t_0) = 4\left\{\left(\int_0^{t_0}\cos\vartheta(\tau)\cdot e^{-\tau}d\tau\right)^2 - \left(\int_0^{t_0}\sin\vartheta(\tau)\cdot e^{-\tau}d\tau\right)^2 - \int_0^{t_0}\cos^2\vartheta(\tau)e^{-2\tau}d\tau\right\} + 1 - e^{-2t_0}$$

$$\leqq 4\left\{\left(\int_0^{t_0}\cos\vartheta(\tau)\cdot e^{-\tau}d\tau\right)^2 - \int_0^{t_0}\cos^2\vartheta(\tau)\cdot e^{-2\tau}d\tau\right\} + 1 - e^{-2t_0}$$

定理1ヲ用ヒ

$$\leqq 4\left\{\left(\nu e^{-\nu} + e^{-\nu} - e^{-t_0}\right)^2 - \left(\nu e^{-2\nu} + \frac{1}{2}e^{-2\nu} - \frac{1}{2}e^{-2t_0}\right)\right\} + 1 - e^{-2t_0}$$

$$F(\nu; t_0) \equiv 4\left\{\left(\nu e^{-\nu} + e^{-\nu} - e^{-t_0}\right)^2 - \left(\nu e^{-2\nu} + \frac{1}{2}e^{-2\nu} - \frac{1}{2}e^{-2t_0}\right)\right\} + 1 - e^{-2t_0}$$

トオケバ

(6) $F(0; t_0) = 3 - 8e^{-t_0} + 5e^{-2t_0} \leqq 3$, （等号ハ $t_0 = \infty$ ノトキ成立ス）

而シテFヲνニツキ微分スレバ

$$\frac{1}{4}F'_\nu(\nu; t_0) = -2\left(\nu e^{-\nu} - e^{-t_0}\right)\nu e^{-\nu}.$$

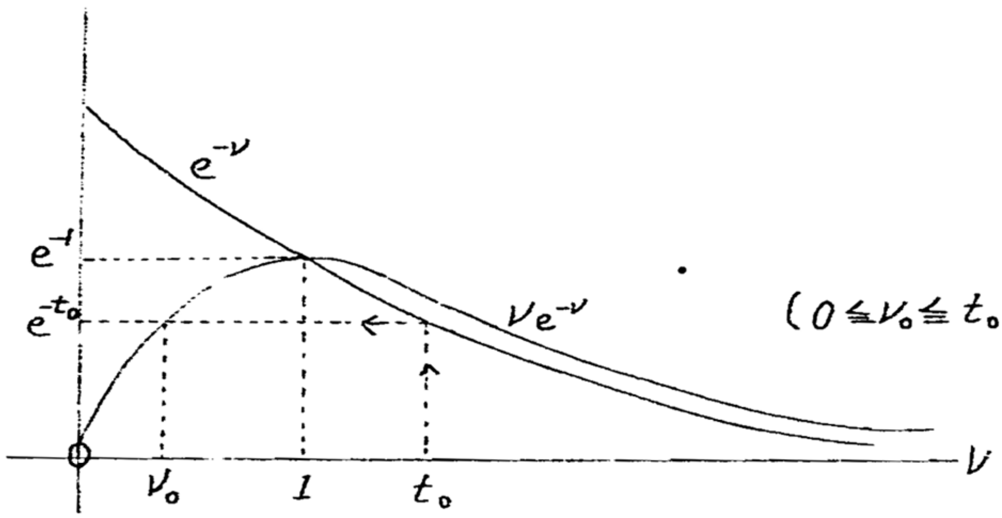
上式ノ根トシテ $\nu = 0$ 及ビ $\nu = \nu_0$ ヲ得. 但シ $0 \leqq \nu_0 \leqq t_0$ デ

(7) $\nu_0 e^{-\nu_0} = e^{-t_0}$

デアル。ν_0 ハ t_0 ノ函數デ $t_0 \to \infty$ ナルトキハ $\nu_0 = \nu_0(t_0) \to 0$ トナル。

而シテ $F(\nu; t_0)$ ハ $\nu = 0$ ノトキ Min. トナリ，$\nu = \nu_0$ ノトキ Max. トナル。尚 $\nu = \nu_0(t_0)$ ハ $t_0 \geqq 1$ ノトキ唯一ツ存在シ，次圖ニヨリテ t_0 ト ν_0 トノ関係が分ルダロウ。

$t_0<1$ ナルトキハ ν_0 存在セズ。依ッテ $t_0<1$ ナルトキハ $\nu_0=t_0$ トスレバヨイ。



定理3. t_0 ニ對シ上ノ如ク $\nu=\nu_0(t_0)$ 決定サレ,

$$\underset{\{f\}}{Max.}|b_2(t_0)|\leqq 4\left\{(\nu_0 e^{-\nu_0}+e^{-\nu_0}-e^{-t_0})^2 -\left(\nu_0 e^{-2\nu_0}+\frac{1}{2}e^{-2\nu_0}-\frac{1}{2}e^{-2t_0}\right)\right\}+1-e^{-2t_0}$$

上ノ等号モ成立スル。

注意. 定理3ニ依ッテ, 我々ノ結論ハ, 多少興味深イコトニハ, $|b_2(t_0)|$ ノ Max. ガ函数(3)デ Schranke ガ與ヘラレナイコトヲ示ス。コノコトハ唯 $t_0=\infty$ ノトキニノミ實現スル。

實際, 今数字的ニ, $t_0=1$ ト考ヘレバ (7) 又ハ上図カラ分カルヤウニ,

$$\nu_0(t_0)_{t_0=1}=1$$

デアル、コノトキニ對シ定理2デ示シタヤウナ $\vartheta(\tau)$ ヲ定義スレバ, コノ $\vartheta(\tau)$ ニ應ズル函数ニ對シ,

$$|b_2(t_0)|_{t_0=1}=1-e^{-2}$$

一方，函數(3)ニ對シテハ

$$b_2(t_0)_{t_0=1} = 3 - 8e^{-1} + 6e^{-2}.$$

且ツ

$$(8) \quad 1 - e^{-2} > 3 - 8e^{-1} + 6e^{-2}$$

デアル、數字的ニ明示スルナラ，(8)カラ

$$6e^{-2} - 8e^{-1} + 2 < 0$$

デアレバヨイノデアルが，實際

$$6e^{-2} - 8e^{-1} + 2 < 6 \cdot 0,1354 - 8 \cdot 0,3678 + 2 = -0.13$$

トナル。

Löwner ノ結果(2′)ハ全ク偶然ノ場合トシテ成立シテキル。 (了)